## 2 函数项级数

知识点回顾:

- 一致收敛的概念; Cauchy 收敛准则; 不一致收敛的刻画
- 一致收敛的判别法: Weierstrass 判别法 (M 判别法); Dirichlet/Abel 判别法;
- ($\star\star\star$) 一致收敛的函数项级数的和函数的性质: 求和与极限交换次序; 逐项积分; 逐项求导; RMK 内闭一致收敛的情况
- 幂级数的收敛半径和收敛域; 幂级数在收敛半径内可以逐项积分和逐项求导

**问题 2.1.** 求下列函数项级数的收敛域:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-nx}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+n)}{n^x}$.

*Solution.* (1) 收敛域为 $(1,+\infty)$. 用 Cauchy 判别法. 记通项为 $a_n$, 则 $\lim_n \sqrt[n]{a_n}=e^{1-x}$. 因此, 当 $x>1$ 时级数绝对收敛, 当 $x<1$ 时发散. 当 $x=1$ 时需要单独判断, 此时 $\lim_n a_n=e^{-1/2}\neq 0$, 故级数发散.

(2) 收敛域为 $(1,+\infty)$. 当 $x>1$ 时, 取 $p\in(1,x)$, 则当 $n$ 充分大时有,$n^{-x}\log(1+n)\leq n^{-p}$, 因此收敛. 当 $x\leq 1$ 时, $n^{-x}\log(1+n)\geq \log n/n$, 故发散.

**问题 2.2.** 判断下列函数项级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n^2\log n}\right)$, $x\in[0,a]$, 其中 $a>0$ 为常数 ;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $x\in[0,+\infty)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $x\in\mathbb{R}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+nx)}{nx^n}$, $x\in[q,\infty)$, 其中 $q>1$ 为常数 ;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$, $x\in[0,1]$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$, $x\in\mathbb{R}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$, $x\in[a,b]$, 其中 $[a,b]$ 为任意有限闭区间.

*Solution.* (1) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $\frac{a}{n^2\log n}$ 控制;

(2) 一致收敛. 方法一: 令 $a_n(x)=(-1)^n$, $b_n(x)=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$. 则 $\sum a_n(x)$ 部分和一致有界, $b_n(x)$ 单调且一致收敛到 0, 利用 Dirichlet 判别法.

方法二: 令 $a_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n(x)=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+x}}$. 则 $\sum a_n(x)$ 一致收敛, $b_n$ 单调且一致有界, 利用 Abel 判别法.

(3) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $n^{-4/3}$ 控制;

(4) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $\frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$ 控制;

(5) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $\frac{\log n}{nq^n}$ 控制;

(6) 一致收敛. 注意到对于给定的 $x\in[0,1]$, $(1-x)x^n$ 单调. 而且对于给定的 $n$, 求 $(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上的最大值可知, $(1-x)x^n\le\frac{1}{n+1}$, 从而它一致收敛到 0. 最后用 Dirichlet 判别法.

(7) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $n^{-3/2}$ 控制.

(8) 一致收敛. 用 Weierstrass 判别法, 用 $n^{-2}$ 控制.

**问题 2.3.** 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 并且可以逐项求导, 此外 $f'(x)$ 连续.

*Sketch of Proof.* (1) 记通项为 $a_n(x)$. 对于 $x\in[0,+\infty)$, 有 $|a_n(x)|\le n^{-2}$. 用 Weierstrass 判别法, 说明 $\sum a_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 对任意的 $\delta>0$, 在 $[\delta,+\infty)$ 上有

$$|a_n'(x)|=\left|\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\right|\le e^{-n\delta}.$$

从而 $\sum a_n'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛. #

**问题 2.4.** 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 但在任何区间内不能逐项求导.

*Sketch of Proof.* 一致收敛容易验证. 记通项为 $a_n(x)$, 说明 $\sum a_n'(x)$ 在任意区间上不是点点收敛的. #

**问题 2.5.** (1) 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\log^2 x$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(2) 证明

$$\int_0^1\frac{\log^2 x}{1-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}.$$

*Sketch of Proof.* (1) 记通项为 $a_n(x)$. 对于给定的 $n$, 求 $a_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值, 可知 $|a_n(x)|\le\frac{4}{e^2n^2}$.

(2) 逐项积分即可. #

**问题 2.6.** (1) 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛;

(2) 判断函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性.

*Sketch of Proof.* (1) 反证法. 假设其一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 但 $S(0)=0$ (trivial), 对于 $x\neq 0$, 利用几何级数/等比数列求和, 可以计算得 $S(x)=1$. 这与 $S$ 的连续性矛盾.

(2) 一致收敛. 对于给定的 $n$, 求 $a_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 的最大值, 可知 $|a_n(x)|\leq C/n$. 然后利用 Dirichlet 判别法.

另一种方法, 写成 $\sum \frac{(-1)^n}{n}\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$ 的形式, 用 Abel 判别法. #

**问题 2.7.** 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但内闭一致收敛, 即对任意 $a>0$, 它在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

*Sketch of Proof.* 记 $a_n(x)=\frac{1}{1+nx}$, 因 $a_n(1/n)=1/2$, 故通项在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛到 0. 从而函数项级数不一致收敛.

在 $[a,+\infty)$ 上, 用 Dirichlet 判别法. #

**问题 2.8.** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 归纳地定义函数列: $f_1(x)=f(x)$,

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 0.

*Sketch of Proof.* 归纳地证明 $|f_n(x)|\leq C\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$. #

**问题 2.9.** 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内一致收敛.

*Sketch of Proof.* (连续使用 Dirichlet/Abe 判别法) 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx.$$

显然 $\frac{1}{1+x^n}$ 一致有界且关于 $n$ 单调. 由 Abel 判别法, 只需证明 $\sum\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内一致收敛. 用 Dirichlet 判别法证明即可. #

**问题 2.10.** 证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 在任何有限区间 $[a,b]$ 上都一致收敛, 但在任何一点 $x_0$ 处都不绝对收敛. *(这个题目表明一致收敛并不蕴含绝对收敛)*

*Sketch of Proof.* 用 Dirichlet 判别法证明一致收敛. 对于给定的 $x_0$, 有 $\sum\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}=\sum\frac{e^{x^2}}{n^{3/2}}+\sum\frac{1}{n}$, 故发散. #