1 数项级数

知识点回顾:

- 级数敛散性概念; Cauchy 收敛准则
- 正项级数的收敛判别法: 比较判别法; 积分判别法; Cauchy 判别法; d'Alembert 判别法; *Rabbe 判别法
- 一般级数的收敛判别法: Lebniz 判别法; Dirichlet/Abel 判别法

问题 1.1. *讨论下列级数的敛散性:*

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\log n)^{\log n}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}\ (p>0)$; $\quad\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log\log n)^q}(q>0)$; $\quad\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p(\log\log n)^q}\ (p,q>0)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin na$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p\ (p>0)$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p\log n}{n}\right)^n\quad(p>0)$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution. (1) 收敛, 因为 n 充分大时, 有 $a_n<n^{-2}$.

(2) 第一个级数: $p>1$ 时收敛, $p\le 1$ 时发散; 第二个级数: $q>1$ 时收敛, $q\le 1$ 时发散; 第三个级数: $p>1$ 时对任意 q 都收敛, $p=1$ 时只有 $q>1$ 才收敛, $q<1$ 时发散. 利用积分判别法.

(3) $a=k\pi$ 时收敛, 其余发散.

(4) $p>\frac{1}{2}$ 时收敛; $p\le\frac{1}{2}$ 时发散. 因为 $a_n=O(n^{-2p})$.

(5) 两个级数都收敛.

(6) $p>1$ 时收敛, $p\le 1$ 时发散; 因为 $a_n=O(n^{-p})$.

(7) 收敛; 因为 $a_n=O(n^{-3/2})$.

问题 1.2. *讨论下列级数的敛散性 (要讨论条件收敛或绝对收敛):*

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}\ (p>0)$; $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\cos n}{n^p}\ (p>0)$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Solution. (1) 条件收敛; 首先 $|a_n| = O(n^{-1})$, 故取绝对值后的级数发散. 注意到如下变形: $\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right) = \sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi + n\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi\right)$, 再用 Lebniz 判别法.

(2) 条件收敛; 用 Lebniz 判别法可知该级数收敛, 因为 $|a_n| = O(1/\sqrt{n})$, 故取绝对值后的级数发散.

(3) 第一个级数: $p>1$ 时绝对收敛, $0<p\le 1$ 时条件收敛, 此时证明收敛用 Dirichlet 判别法, 在证明取绝对值后级数发散时, 要用到如下估计:

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \ge \frac{\sin^2 n}{n^p} = \frac{1-\cos 2n}{2n^p}.$$

第二个级数同样当 $p>1$ 时绝对收敛, $0<p\le 1$ 时条件收敛, 此时证明收敛时用 Abelpbf 比较方便.

(4) 发散. 考虑 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

问题 1.3 (10.2 第 6 题)**.** 设 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l$, 其中 $0<l<\infty$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

Sketch of Proof. 利用 $u_n = O(1/n)$. #

问题 1.4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 求证: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$收敛; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1-u_n}$收敛.

Sketch of Proof. (1) 用均值不等式放缩; (2) 利用 $u_n \to 0$. #

问题 1.5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 求证: 当 $x>x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

问题 1.6. 设 $\{b_n\}$ 是单调递增的正数列, 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}^2}$ 收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}$ 收敛当且仅当 $\{b_n\}$ 有界.

Sketch of Proof. (1) 利用 $0 \le \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}^2} \le \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}$.

(2) 必要性: 注意到 $0 \le \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \le \frac{b_{n+1}-b_n}{b_1}$. 充分性: 利用 $\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n} \ge \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. #

问题 1.7. 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列, 其部分和记为 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 若 $\{S_n - na_n\}$ 有界且 $\{a_n\}$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Sketch of Proof. 固定 n, 对任意 $m > n$ 有

$$0 \le S_n - na_m \le S_m - ma_m \le M.$$

令 $m \to \infty$, 可知 S_n 有界. #

问题 1.8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right) = 0$.

Sketch of Proof. 记部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 且 $S_0 = 0$. 利用 Abel 求和公式:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ka_k &= \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=1}^{n} kS_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k = nS_n - \sum_{k=1}^{n} S_k.\end{aligned}$$

#

问题 1.9. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 单调递减. 证明 a_n 单调递减地趋于 0, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

Sketch of Proof. 易证 $\{a_n\}$ 单调递减地趋于 0. 之后利用如下不等式:

$$0 \le \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} \le \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2) \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k - a_{k+1}}.$$

#

问题 1.10 (Kummer 判别法 *)**.** 设 a_n, b_n 为正数列.

(1) 若存在 $\theta > 0$, 使得 $\frac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \ge \theta$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散且 $\frac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \le 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

Sketch of Proof. (1) 因 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \ge \theta b_{n+1} > 0$, 故 $\{a_n b_n\}$ 单调减. 又因 $a_n b_n \ge 0$, 故 $\{a_n b_n\}$ 收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ 收敛, 利用比较判别法即可.

(2) 因 $\frac{a_k}{a_{k+1}} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}$, 对 $k = 1, \cdots, n-1$, 把这些不等式乘起来, 有 $\frac{a_1}{a_n} \le \frac{b_n}{b_1}$. #