3 幂级数和 Taylor 级数

知识点回顾:

- 幂级数的收敛半径和收敛域; 幂级数在收敛半径内可以逐项积分和逐项求导
- Taylor 级数的计算

问题 3.1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-2)^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4^{n^2}x^{n^2}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$; 其中 $a,b>0$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Solutions. (1) 通项系数为 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 因 $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 故收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1,1)$. 下面来看端点处的收敛, 当 $x=\pm 1$ 时, 通项不趋于 0, 故发散. 综上收敛半径为 1, 收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 通项系数为 $a_n=n!\,n^{-n}$. 因 $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}$, 故收敛半径为 e, 收敛区间为 $(2-e,2+e)$. 下面来看端点处的收敛, 当 $x-2=\pm e$ 时, 利用斯特林公式可知 $\frac{n!}{n^n}e^n=O(\sqrt{n})$, 从而通项不趋于 0, 故发散. 综上收敛半径为 e, 收敛域为 $(2-e,2+e)$.

(3) 记 $a_n(x)=(4x)^{n^2}$, 则

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=|4x|^{2n+1}\to\begin{cases}0, & \text{当}|x|<1/4\text{时},\\ 1, & \text{当}|x|=1/4\text{时},\\ \infty, & \text{当}|x|>1/4\text{时}.\end{cases}$$

因此当 $|x|<1/4$ 时幂级数收敛, 当 $|x|>1/4$ 时幂级数发散, 从而收敛半径为 $1/4$. 在端点处, 即 $x=\pm 1/4$ 时, 通项不趋于 0, 故发散. 综上收敛半径为 $1/4$, 收敛域为 $(-1/4,1/4)$.

(4) 记 $a_n(x)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 则

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}x^2\to x^2\begin{cases}<1, & \text{当}|x|<1\text{时},\\ =1, & \text{当}|x|=1\text{时},\\ >1, & \text{当}|x|>1\text{时}.\end{cases}$$

因此当 $|x|<1$ 时幂级数收敛, 当 $|x|>1$ 时幂级数发散, 从而收敛半径为 1. 在端点处, 即 $x=\pm 1$ 时, 由 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=O(n^{-1/2})$(见问题 1.2 (2) 或书上习题 10.3 的 1(6)), 可知级数收敛. 综上收敛半径为 1, 收敛域为 $[-1,1]$.

(5) 拆分成两个幂级数 $\sum \frac{a^n}{n}x^n$ 和 $\frac{b^n}{n^2}x^n$, 这两个幂级数收敛半径分别为 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$, 因此整体幂级数的收敛半径为 $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.

下面考虑端点处的收敛性:

- 若 $a \geq b$, 即 $R = \frac{1}{a}$. 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, 因 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, $\sum \frac{(b/a)^n}{n^2}$ 绝对收敛, 故整体发散; 当 $x = -1/a$ 时, 因 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, $\sum \frac{(-b/a)^n}{n^2}$ 绝对收敛, 故整体收敛. 因此收敛域为 $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) = [-R, R)$.
- 若 $a < b$, 即 $R = \frac{1}{b}$. 当 $x = \pm\frac{1}{b}$ 时, 因 $\sum \frac{(a/b)^n}{n}$ 收敛, $\sum \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛, 故整体收敛. 因此收敛域为 $\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right] = [-R, R]$.

综上, 收敛半径为 $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$. 当 $a \geq b$ 时, 收敛域为 $[-R, R)$; 当 $a < b$ 时, 收敛域为 $[-R, R]$.

(6) 令 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 则关于 y 的幂级数的收敛半径为 1, 收敛域为 $y \in [-1, 1)$. 从而原级数收敛域为 $(0, +\infty)$.

问题 3.2. *求下列幂级数的和函数:*

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)x^{2n-2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

Solutions.(1) 容易求出该幂级数的收敛半径为 1, 收敛域为 $(-1, 1)$. 设和函数为 $F(x)$, 对于 $x \in (-1, 1)$, 逐项积分可得

$$\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{-x}{1+x^2}, \quad (|x| < 1).$$

因此 $F(x) = \left(\frac{-x}{1+x^2}\right)' = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$.

(2) 容易求出该幂级数的收敛半径为 1, 收敛域为 $(-1, 1)$. 设和函数为 $F(x)$, 对于 $x \in (-1, 1)$, 逐项积分可得

$$\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}x^n := H(x).$$

对 $H(x)$ 逐项积分,

$$\int_0^x H(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}x^{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x^2}{2(1-x)}, \quad (|x| < 1).$$

故 $H(x) = \left(\dfrac{x^2}{2(1-x)}\right)' = \dfrac{2x - x^2}{2(1-x)^2}$, $F(x) = H'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$.

(3) 容易求出该幂级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$, 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 设和函数为 $F(x)$, 对于 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 逐项积分可得

$$\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{x}{2-x^2}, \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

因此 $F(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$.

问题 3.3. 利用幂级数的和, 求下列级数的值:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

Solutions. (1) 考虑幂级数 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$. 其收敛半径为 1, 故在 $(-1,1)$ 内可以逐项求导, 从而

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},\quad |x|<1.$$

由 $F(0)=0$ 可知,

$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad |x|<1.$$

特别地, 在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处有,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(2n-1)2^n}=F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\log(\sqrt{2}+1).$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$.

(2) 由问题 3.2(3), 取 $x=1$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

问题 3.4. (1) 求 $\cos x$ 在 $x=-\frac{\pi}{4}$ 处的 *Taylor* 展开式 ;

(2) 求 $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开式.

Solutions. 书上 P319 例 4 和 P320 例 6.

问题 3.5. 求下列函数在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开式:

(1) $\sin^3 x$;

(2) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$;

Solutions. (1) 利用三倍角公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ 和 $\sin x$ 的展开式, 可得

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-3^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

(2) 令 $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$, 则

$$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad |x|\leq 1.$$

逐项积分, 可得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|\le 1.$$

(3) 利用 $\sin x$ 的展开和逐项积分, 可得

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

问题 3.6. 证明积分恒等式:

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^x\log x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)(n+1)!}$.

Sketch of Proof. (1) 利用 $\log(1+x)$ 的展开式和逐项积分.

(2) 验证函数项级数 $(e^x-1)\log x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\log x$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 然后逐项积分即可. #

问题 3.7. 考虑幂级数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, 证明对于任意 $x\in(0,1)$ 有

$$f(x)+f(1-x)+\log x\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad\left(=\frac{\pi^2}{6}\right).$$

Sketch of Proof. 令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\log x\log(1-x)$, 则

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\log(1-x)}{x}-\frac{\log x}{1-x}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{(1-x)^{n-1}}{x}\right)+\frac{\log(1-x)}{x}-\frac{\log x}{1-x}.\end{aligned}$$

在结合 $\log(1-x)$ 在 $x=0$ 处对 Taylor 展式和 $\log x$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展式, 证明 $F'\equiv 0$. #

问题 3.8. 利用 *Taylor* 展开求 $f(x)=\cos(\sin x)$ 在 $x=0$ 处的前 *5* 阶导数.

Solution. 注意到 f 是偶函数, 故 $f^{(2n+1)}(0)=0$, 我们只需计算 $f''(0)$ 和 $f^{(4)}(0)$. 即只关注 f 的 Taylor 展开的 x^2 和 x^4 项系数.

因 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$, 故

$$\begin{aligned}\cos(\sin x)&=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x+O(x^3)\right)+O(x^6)\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+O(x^6).\end{aligned}$$

由 Taylor 级数的唯一性, $f''(0)/2=-1/2$, $f^{(4)}(0)/4!=5/24$, 得 $f''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=5$.