6 含参变量的广义积分

知识点回顾:

- 一致收敛的概念; Cauchy 收敛准则.
- Weierstrass 判别法, Dirichlet/Abel 判别法.
- 含参变量的广义积分一致收敛的性质: 连续性 (极限与积分交换次序); 可积性 (交换积分次序); 可微性 (积分号下求导).
- Γ 函数与 B 函数.

问题 6.1. 判断下列含参变量的积分在指定区间上的一致收敛性:

(1) $I(y)=\int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x$, 其中参数 $y\in[\varepsilon,1]$, $\varepsilon>0$.

(2) $I(y)=\int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x$, 其中参数 $y\in(0,1]$.

(3) $I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x$, 其中参数 $y\in[\varepsilon,+\infty)$, $\varepsilon>0$.

(4) $I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x$, 其中参数 $y\in(0,+\infty)$.

(5) $I(p)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$, 其中参数 $p\in[0,+\infty)$.

Solutions. (1) 对任意 $y\in[\varepsilon,1]$, 有 $|ye^{-xy}|\le e^{-\varepsilon x}$. 由 Weierstrass 判别法可知一致收敛.

(2) 取 $X_n=n, y_n=1/n$, 有

$$\left|\int_{X_n}^{\infty} y_n e^{-xy_n}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_n^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x\right| = \int_1^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

故不一致收敛.

(3) 对任意 $y\in[\varepsilon,+\infty)$, 有 $|e^{-xy}\sin x|\le e^{-\varepsilon x}$. 由 Weierstrass 判别法可知一致收敛.

(4) *Idea:* 我们先计算 $I_X(y)=\int_X^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x$. 然后找序列 $X_n\to+\infty$ 和 $y_n\to 0$, 使得 $|I_{X_n}(y_n)|$ 有一致的正下界, 即可说明不一致收敛.

分部积分两次, 可得

$$\begin{aligned} I_X(y) &= \int_X^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x = -e^{-xy}\cos x\Big|_{x=X}^{x=+\infty} - y\int_X^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-Xy}\cos X - y\left(e^{-xy}\sin x\Big|_{x=X}^{x=+\infty} - y\int_X^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{-Xy}(\cos X - y\sin X) - y^2 I_X(y). \end{aligned}$$

故

$$I_X(y)=\frac{e^{-Xy}(\cos X - y\sin X)}{1+y^2}.$$

取 $X_n = 2n\pi, y_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则
$$|I_{X_n}(y_n)| = \frac{e^{-1}}{1+\frac{1}{(2n\pi)^2}} \geq \frac{1}{2e}.$$

(5) 利用 Dirichlet 判别法, 一致收敛. #

问题 6.2. 通过对参数积分或求导的方法, 求下列积分 :

(1) 求 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin xy}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $y \in [0,+\infty)$.

(2) 借助 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 来求 *Dirichlet* 积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

(3) 借助 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 来求积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solutions. (1) 先验证积分号下求导的条件. 记被积函数为 $f(x,y) = e^{-x}\frac{\sin xy}{x}$.

- 对任意 $y \in [0,+\infty)$, $I(y)$ 收敛;
- 由 $|f_y(x,y)| = |e^{-x}\cos xy| \leq e^{-x}$, 可知 $\int_0^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛;

因此, $I(y)$ 可导, 且可在积分号下求导. 有
$$\begin{aligned}
I'(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\cos xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin xy\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - y\left(-e^{-x}\sin xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + y\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1 - y^2 I'(y).
\end{aligned}$$

故 $I'(y) = \frac{1}{1+y^2}$, 结合 $I(0) = 0$, 可得 $I(y) = \arctan y$.

(2) 先验证积分号下求导的条件. 记被积函数为 $f(x,y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$.

- 对任意 $y \in [0,+\infty)$, $I(y)$ 收敛; 用 Abel 判别法还可以证明 $I(y)$ 对于 $y \in [0,1]$ 是一致收敛的. 故 $I(y)$ 在原点处连续.
- 对任意 $\delta > 0$ 和 $y \in [\delta,+\infty)$, 有 $|f_y(x,y)| = |-e^{-xy}\sin x| \leq e^{-\delta x}$, 用 Weierstrass 判别法可知 $\int_0^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [\delta,+\infty)$ 一致收敛;

因此, $I(y)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上可导, 且可在积分号下求导. 因为可导是局部性质, 由 δ 的任意性, $I(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且
$$\begin{aligned}
I'(y) &= \int_0^{+\infty} -e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x = e^{-xy}\cos x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -1 - y\left(e^{-xy}\sin x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -1 - y^2 I'(y).
\end{aligned}$$

故 $I'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, 可得 $I(y) = -\arctan y + C$. 因
$$0 \leq |I(y)| \leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}.$$

故 $\lim_{y\to+\infty} I(y)=0$, 从而 $C=\frac{\pi}{2}$. 最后, $J=I(0)=\lim_{y\to 0} I(y)=\frac{\pi}{2}$.

(3) 先验证积分号下求导的条件. 记被积函数为 $f(a,x)=\frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}$.

• 当 x 充分大时, $|f(a,x)|\le Cx^{-3/2}$ 对任意 $a\in[0,+\infty)$ 一致成立. 由 Weierstrass 判别法, $I(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 故 $I(a)$ 在连续.

• 对任意 $\delta>0$ 和 $a\in[\delta,+\infty)$, 有

$$|f_a(a,x)|=\left|\frac{x^2}{(1+ax^2)(1+x^2)}\right|\le\frac{1}{1+\delta x^2}$$

用 Weierstrass 判别法可知 $\int_0^{+\infty} f_a(a,x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛;
因此, $I(a)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上可导, 且可在积分号下求导. 因为可导是局部性质, 由 δ 的任意性, $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且对于 $a>0, a\neq 1$, 有

$$\begin{aligned}
I'(a)&=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+ax^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+ax^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{a}}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

积分得 $I(a)=\pi\log(1+\sqrt{a})+C$. 因 $I(a)$ 连续, 故该表达式对 $a=0,1$ 也成立. 因 $I(0)=0$, 故 $C=0$, 从而 $J=I(1)=\pi\log 2$. #

问题 6.3. (1) 证明: Γ 函数和 B 函数之间有如下关系: 对任意 $p,q>0$, 有

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

(2) 证明:$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$

(3) 利用 Γ 函数和 B 函数求下列无穷积分:

$$I(\alpha)=2\int_0^{+\infty}x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{1/4}}}.$$

Proof. (1) 对任意 $p,q>0$，考虑 Gamma 函数的乘积表达式：

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}dy.$$

看成二重积分, 做变量替换 $x=tz$，$y=(1-t)z$，得：

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\Gamma(p+q)B(p,q).$$

(2) 在 Beta 函数定义中，令 $t=\cos^2\theta$，则积分变为：

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta.$$

(3) 第一个积分, 做变量替换 $t=x^2$, 得 $I(\alpha)=\Gamma(\alpha)$.

第二个积分, 变量替换 $t=x^{1/4}$, 得 $I=4B\left(4,\frac{1}{2}\right)=\frac{128}{35}$. #

问题 6.4. 设 $y(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. 证明：

(1) $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$;

(2) $y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶连续可导, 且可以在积分号下求两次导数；

(3) $y(x)$ 满足微分方程 $y''+y=\frac{1}{x}$.

Sketch of Proof. (1) 记被积函数 $f(x,t)=\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$. 由 $|f(x,t)|\le e^{-tx}$, 用 Werierstrass 判别法可得, $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 且

$$0\le y(x)\le\int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{x}.$$

因此 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$.

(2) 对任意 $\delta>0$, 因 $|f_x(x,t)|,|f_{xx}(x,t)|\le e^{-\delta t}$ 对任意 $x\in[\delta,+\infty)$ 一致成立, 故 $\int_0^\infty f_x(x,t)\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^\infty f_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $y(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上二阶连续可导, 且可以在积分号下求两次导数. 由 δ 的任意性, 这在 $(0,+\infty)$ 上都成立.

(3) 直接计算得:

$$y''+y=\int_0^\infty\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt+\int_0^\infty\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt=\int_0^\infty e^{-tx}dt=\frac{1}{x}.$$

□

问题 6.5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 考虑 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$. 证明：

(1) $I(y)$ 在 $(0,1)$ 上连续；

(2) $I(y)$ 在原点处连续当且仅当 $f(0)=0$.

Sketch of Proof. (1) 对任意给定的 $y_0\in(0,1)$, 当 $y\in\left[\frac{y_0}{2},1\right]$ 时, $I(y)$ 是含参变量的正常积分, 由被积函数的连续性, 可得 $I(y)$ 在 y_0 处的连续性. 因 y_0 是任意的, 故 $I(y)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

(2) 显然 $I(0)=0$. 所以我们需要证明 $\lim_{y\to0}I(y)=0$ 当且仅当 $f(0)=0$. 下面我们来求 $I(y)$ 在原点处的极限. 因为原点有可能是瑕点, 所以我们将积分分成两段来考虑.

对任意给定的 $y\in(0,1]$, 将 $I(y)$ 拆成两部分

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{y^a}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\int_{y^a}^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x:=I_1(y)+I_2(y),$$

其中 $a>0$ 待定.

- 对于 I_2. 因 f 连续, 故有界, 设 $|f|\le M$. 此时

$$|I_2(y)|\le M\int_{y^a}^1\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\le M\frac{y}{y^{2a}+y^2}.$$

因此, 只要取 $\boxed{a<1/2}$, 就有 $\lim_{y\to0}I_2(y)=0$. 不妨取 $a=\frac{1}{4}$.

• 对于 I_1. 由积分中值定理,

$$I_1(y)=\int_0^{y^{1/4}}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{y^{1/4}}\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan y^{-\frac{3}{4}}$$

其中 $\xi\in[0,y^{\frac{1}{4}}]$. 因此 $\lim_{y\to 0}I_1(y)=f(0)\dfrac{\pi}{2}$. (或者结合 f 的连续性, 用 $\varepsilon-\delta$ 语言也可以严格证明这个结论.)

综上, $\lim_{y\to 0}I(y)=f(0)\frac{\pi}{2}$, 其等于 0 当且仅当 $f(0)=0$. □