4 广义积分

知识点回顾:

- 无穷积分/瑕积分收敛的概念; Cauchy 收敛准则.
- 比较判别法, Cauchy/Dirichlet 判别法.
- 换元和分部积分.

问题 4.1. 判断下列无穷积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>0$;

(2) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin x}{x\log x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>0$;

(4) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>0$;

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>0$;

(6*) $\displaystyle\int_0^\infty \left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$

Solutions. (1) 注意 0 是瑕点, 故拆分成两部分: $I_1=\int_0^1\ldots$, $I_2=\int_1^\infty\ldots$

对于 I_1. 当 $x\to 0$ 时, $\log(1+x)/x^p\sim x^{1-p}$, 故 I_1 收敛当且仅当 $p<2$.

对于 I_2. 若 $p>1$, 当 x 充分大时, 取 $1<r<p$, 有 $\log(1+x)/x^p\sim x^{-r}$, 故 I_2 收敛. 若 $p\le 1$, 当 x 充分大时, 取 $1<r<p$, 有 $\log(1+x)/x^p\ge x^{-1}$, 故 I_2 发散.

综上, 当 $1<p<2$ 时收敛, 其余发散.

(2) 条件收敛. 利用 Dirichlet 判别法, $x\log x$ 单调递减地趋于 0, $\int\sin x$ 有界. 在证明其绝对值的积分发散时, 利用 $\int\frac{1}{x\log x}$ 发散.

(3) 利用

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\le\frac{1}{x^p(x^p-1)},$$

可知当 $p>\frac{1}{2}$ 时积分收敛, 其余发散.

(4) 利用

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}.$$

从而, 当且仅当 $p>\frac{1}{2}$ 时积分收敛, 其余发散.

(5) 因为当 $x \to 0$ 时, 有

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \begin{cases} 1 \quad if\ p > 1; \\ 1/2 \quad if\ p = 1; \\ 0 \quad if\ p < 1; \end{cases}$$

因此 0 不是瑕点, 故敛散性与 (4) 相同.

(6) 注意 0 是瑕点, 故拆分成两部分: $I_1 = \int_0^1 ...$, $I_2 = \int_1^\infty ...$

在原点附近, 有

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left[-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right]^{-\frac{1}{3}},$$

故 I_1 绝对收敛.

在无穷远处, 利用 $(1+t)^\alpha$ 的 Taylor 展开, 有

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

故 I_2 条件收敛.

综上, 积分条件收敛. #

问题 4.2. 讨论下列无穷积分或瑕积分的敛散性. 若收敛, 求出其值.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)}$, 其中 $p > 0$.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 t^n (\log t)^m\,\mathrm{d}x$, 其中 m, n 为正整数.

Solutions. (1) 收敛性用比较判别法容易验证, 下求其值. 做换元 $y = \arctan x$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^p y}\,\mathrm{d}y.$$

在利用换元 $z = \frac{\pi}{2} - y$, 会发现 $I = \frac{\pi}{2} - I$, 故 $I = \frac{\pi}{4}$.

(2) 收敛性用比较判别法容易验证, 下求其值. 做换元 $t = 1/x$, 会发现 $I = -I$, 故 $I = 0$.

(3) 固定 n, 由分部积分可得, $I_m = -\frac{m}{n+1} I_{m-1}$. 从而, $I_m = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$. #

问题 4.3. 设 $f \in C[0, +\infty)$, 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在且有限. 参数 $b > a > 0$, 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0) - A)\log\frac{b}{a}.$$

Sketch of Proof. 对任意 $0 < r < R < +\infty$, 考虑正常积分

$$\int_r^R \frac{f(ax) - f(b(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\int_{ar}^{aR} - \int_{br}^{bR}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left(\int_{ar}^{br} - \int_{aR}^{bR}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $r \to 0, R \to +\infty$ 即可, 严格证明可能要用积分中值定理, 或者用 $\varepsilon - \delta$ 语言. □

Remark 4.4. 无穷积分的收敛性与无穷远处的极限

无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛一般不意味着 $f(x) \to 0$ as $x \to \infty$. 例如

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

收敛. 但显然 $\sin x^2$ 不收敛到 0 as $x \to \infty$.

所以“无穷积分收敛” + 额外条件 (例如单调性, 一致连续性......), 才能得到 $f(x) \to 0$.

问题 4.5. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$ 且 f 单调. 若无穷积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

问题 4.6. 设 $f \in C^1[1, +\infty)$, 且当 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减地趋于 0. 若无穷积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

5 含参变量的正常积分

知识点回顾:

- 含参变量的正常积分的连续性, 可积性和可微性.

问题 5.1. 求极限:

$$\lim_{t\to 0}\int_t^{1+t}\frac{1}{1+x^2+t^2}\,\mathrm{dx}.$$

Solutions. 利用含参变量积分的连续性, 直接把 t 取成 0 即可, 结果为 $\frac{\pi}{4}$. #

问题 5.2. 设 f 连续, 令

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

求 $F''(x)$.

Solutions. 将 F 写成 $F(x)=\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, 积分号下求导, 得

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{h^2}\int_0^h\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{h^2}\left(\int_0^h f(x+\xi+h)\,\mathrm{d}\xi-\int_0^h f(x+\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\\&=\frac{1}{h^2}\left(\int_{x+h}^{x+2h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

再在积分号下求导, 得

$$F''(x)=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.$$

#

问题 5.3. 求含参变量的积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin^2 x+a^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x,\quad a>0.$$

Hint. 积分号下对 a 求导, 得 $I'(a)=\frac{\pi}{a+1}$. 显然 $I(1)=0$, 故 $I(a)=\pi[\log(a+1)-\log 2]$. #

问题 5.4. 求含参变量的积分

$$I(a,b)=\int_0^1\sin\left(\log\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x,\quad b>a>0.$$

Hint. 令 $f(x,y)=\sin\left(\log\frac{1}{x}\right)x^y$, 则

$$I(a,b)=\int_0^1\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

交换积分次序, 直接计算得,

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

因此,

$$I(a,b)=\int_a^b\frac{1}{1+(1+y)^2}\,\mathrm{d}y=\arctan(1+b)-\arctan(1+a).$$

#