2 函数极限和函数的连续性.

知识点回顾:

- 定义, $\varepsilon-\delta$ 语言; 归结原理.
- o, O 与等价无穷小.
- 连续性的概念, 有界闭区间上连续函数的性质 $(\star)$

问题 2.1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}, \quad (a>0)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-3}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{ax}$, 其中常数 $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Solutions. (1) $\dfrac{1}{2}$; 使用三角恒等式 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

(2) $\cos a$; 做换元 $t=x-a$, 使用三角恒等式: $\sin x=\sin(a+t)=\sin a\cos t+\sin t\cos a$. 当 $x\to a$ 时, $t\to 0$. 因此,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}&=\lim_{t\to 0}\frac{\sin a\cos t+\sin t\cos a-\sin a}{t}\\&=\sin a\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\cos t-1}{t^2}+\cos a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\cos a.\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{5}{3}$; 令 $a=\sqrt[3]{1+3x}, b=\sqrt[3]{1-2x}$，使用恒等式 $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$，则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-b}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{(a^2+ab+b^2)(x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{5}{(a^2+ab+b^2)(x+1)}=\frac{5}{3}.$$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$;

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x^2+ax+a^2}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+1}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}a}.\end{aligned}$$

(5) 1;

(6) e; 做换元 $t=\dfrac{1}{x-1}$, 则当 $x\to+\infty$ 时, $t\to 0+$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3} &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left\{(x-3)\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right\}\\ &= \lim_{t\to 0+}\exp\left\{\frac{1-2t}{t}\log(1+t)\right\}=e.\end{aligned}$$

(7) 1;

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\log(1+x)}-1}{a\log(1+x)}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}=1\cdot 1=1.$$

常用等价无穷小:

$\sin x\sim x$; $\quad 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$; $\quad \tan x\sim x$;

$\log(1+x)\sim x$; $\quad e^x-1\sim x$; $\quad$ 对于常数 $a>0$, $a^x\sim x\log a$;

$(1+x)^a-1\sim ax$.

问题 2.2. *求下列极限:*

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$;

Solutions. (1) $-\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 1;

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=1$$

问题 2.3. 已知 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$, *求参数 a,b 的所有可能取值.*

Solution. 因

$$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}.$$

要使其当 $x\to\infty$ 时极限为 0, 则必须要求 $1-a^2=0$, 即 $a=\pm 1$. 因为, 当 $a\neq\pm 1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=+\infty.$$

当 $a=1$ 时,

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(1+2b)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+x+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(1+2b)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}=-\frac{1+2b}{2}.$$

因此 $b=-\frac{1}{2}$.

当 $a=-1$ 时, 无论 b 取何值, 都有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x+b\right)=+\infty.$$

综上, (a,b) 所有可能的取值为 $\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$. #

问题 2.4. *设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0)>0$. 证明存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x-0-\delta,x_0+\delta)$ 内恒正.*

Proof. 由连续性可知, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$. 再由极限的定义可得, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2},\qquad\Longrightarrow\qquad f(x)\ge\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

□

问题 2.5. *设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b$.*

Proof. 利用 e^x 和 $\log x$ 的连续性, 有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\log f(x)}=e^{b\log a}=a^b.$$

□

问题 2.6. *设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 我们称 f 是 Lipschitz 的, 如果存在一个常数 $L\ge0$, 使得*

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\qquad \textit{for any } x,y\in\mathbb{R}.$$

(1) 证明 f 连续.

(2) 若常数 $L<1$, 此时称 f 为压缩映射 (contracting mapping), 证明 f 一定存在不动点, 即存在 $x^*\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x^*)=x^*$.

Sketch of Proof. (2) 任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 做迭代 $x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$. 则

$$\begin{aligned}|x_n-x_{n-1}|&=|f(x_{n-1})-f(x_{n-1})|\le L|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&=L|f(x_{n-2})-f(x_{n-3})|\le L^2|x_{n-2}-x_{n-3}|\\&\le\cdots\\&\le L^{n-1}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取

$$N=\left[\frac{\log\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}}{\log L}\right]+1,\qquad\Longrightarrow\qquad |x_1-x_0|\frac{L^N}{1-L}<\varepsilon.$$

此时, 对任意 $n > N$ 和任意正整数 p, 我们有

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\le \sum_{k=n}^{n+p-1} |x_{k+1} - x_k| \le |x_1 - x_0| \left(L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+p-1}\right) \\
&= |x_1 - x_0| L^n \frac{1 - L^p}{1 - L} \le |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 由 Cauchy 收敛原理, $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 x^*. 由 f 的连续性, 可知

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x^*).$$

综上, x^* 即为我们要找的不动点. #

问题 2.7. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, 证明 f 有界.

利用此结论回顾习题 1.2 的第 14 题: 判断函数 $f(x) = \dfrac{x^6 + x^4 + x^2}{x^6 + 1}$ 是否有界?

Proof. 由极限的定义, 存在充分大的常数 $A > 0$, 使得当 $|x| > A$ 时, 有 $|f(x) - l| < 1$. 因此

$$l - 1 < f(x) < l + 1, \qquad \text{for any } |x| > A.$$

另一方面, 因 f 连续, 故 f 在有限闭区间 $[-A, A]$ 上有界, 记 $\max_{[-A,A]} |f(x)| = M$. 因此, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\min\{l - 1, -M\} \le f(x) \le \max\{l + 1, M\},$$

故 f 有界. □

问题 2.8. (1) 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 若 $0 \le f(x) \le 1$, 证明 f 存在不动点, 即存在 $x^* \in [0, 1]$, 使得 $f(x^*) = x^*$.

(2) 设 f 是 $[0, 2]$ 上的连续函数, 且 $f(0) = f(2)$. 证明存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使得

$$|x_1 - x_2| = 1, \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Proof. (1) 考虑函数 $g(x) = f(x) - x$, 则 g 连续, $g(0) \ge 0 \ge g(1)$. 由连续函数的介值性, 存在 $x^* \in [0, 1]$, 使得 $g(x^*) = x^*$.

(2) 考虑函数 $h(x) = f(x + 1) - f(x)$, $x \in [0, 1]$. 我们的目标是要证明存在 $x^* \in [0, 1]$, 使得 $h(x^*) = 0$. 反证法, 假设 h 在 $[0, 1]$ 上没有零点. 注意到 $h(0) = f(1) - f(0) = f(1) - f(2) = -h(1)$. 因 $h(0), h(1)$ 都不为 0, 故它们必定一正一负. 由介值定理, h 在 $[0, 1]$ 上有零点, 矛盾. □

问题 2.9. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且满足 $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 若 f 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 这两点处连续, 证明 f 为常函数.

Proof. 任意给定 $x_0 > 0$, 有

$$f(x_0) = f\left(x_0^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x_0^{\frac{1}{4}}\right) = \cdots = f\left(x_0^{\frac{1}{2n}}\right) = \cdots.$$

令 $n \to \infty$, 由 f 在 1 处的连续性可得,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0^{\frac{1}{2n}}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_0^{\frac{1}{2n}}\right) = f(1).$$

对任意给定的 $x_0 < 0$, 有 $f(x_0) = f(x_0^2) = f(1)$.

最后, 由 f 在 0 处的连续性可得, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(1)$. □

问题 2.10 (*). 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且满足函数方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

若 f 在 0 处连续, 证明 f 一定是线性函数, 即 $f(x) = ax$.

Proof. Step 1. 首先我们证明对任意 $c \in \mathbb{R}$, 有 $f(cx) = cf(x)$.

由函数方程, 可得

$$\begin{aligned}
&f(2x) = f(x+x) = 2f(x),\\
&f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = f(x),\\
&\qquad\cdots\\
&f(nx) = nf(x).
\end{aligned}$$

因此,

$$f(nx) = nf(x), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

用 x/n 替换 x, 则得

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

结合(1),(2)可得

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} f(x), \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

又因为 $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$, 故 $f(0) = 0$. 从而 $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, 这说明了 $f(x) = -f(-x)$, 即 f 是奇函数. 结合(3)可知, 对任意有理数 $q \in \mathbb{Q}$, 有 $f(qx) = qf(x)$.

现对于任意实数 $c \in \mathbb{R}$, 由有理数的稠密性, 存在有理数列 $\{c_n\} \subset \mathbb{Q}$, 使得 $c_n \to c$. 因此

$$f(cx) - c_n f(x) = f(cx) - f(c_n x) = f((c - c_n)x).$$

令 $n \to \infty$, 利用 f 在 0 处的连续性, 得

$$f(cx) = cf(x), \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Step 2. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = f(x \cdot 1) = f(1)x$. 故 f 是线性函数. □