1 实数和数列极限

知识点回顾:

- 极限的定义: $\varepsilon - N$ 语言.
- 证明极限存在的方法: 夹逼定理, 单调收敛原理, Cauchy 收敛准则.
- 极限的四则运算.

问题 1.1 (有理数和无理数的稠密性)**.** 设 (a,b) 为任意开区间, 证明 (a,b) 中既有有理数也有无理数.

Proof. 取充分大的正整数 N, 使得 $\frac{1}{2^N} < b-a$. 则一定存在某个 $k, k' \in \mathbb{Z}$, 使得 $\frac{k}{2^N}, \sqrt{2} + \frac{k'}{2^N} \in (a,b)$. 可以理解为, 将数轴分成若干个长度为 $\frac{1}{2^N}$ 的小区间, 因为区间长度比 $b-a$ 严格小, 所以一定会存在某个小区间的端点落在 (a,b) 内. □

问题 1.2. 研究函数 $f(x) = \frac{x^6+x^4+x^2}{1+x^6}$ 是否是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数.

Proof. 利用 Young 不等式: 设 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对于 $a, b \geq 0$, 有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

有 Young 不等式可得,

$$x^2 = x^2 \cdot 1 \leq \frac{(x^2)^3}{3} + \frac{1}{3/2} = \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{3}.$$

$$x^4 = x^4 \cdot 1 \leq \frac{(x^4)^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{3}.$$

因此,

$$0 \leq \frac{x^6+x^4+x^2}{1+x^6} \leq \frac{2x^6+1}{x^6+1} \leq 2.$$

□

问题 1.3. 用 $\varepsilon - N$ 语言证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(1+a)^n} = 0$, 其中 a 为给定的正常数.

证明. 当 $n \geq 3$ 时, 由二项式定理:

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \geq C_n^3 a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^3.$$

因此,

$$\left| \frac{n^2}{(1+a)^n} \right| \leq \frac{n}{(n-1)(n-2)a^3} \leq \frac{3}{2(n-2)a^3}.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{3}{2a^3\varepsilon} \right] + 3$, 则当 $n \geq N$ 时, 我们有

$$\left| \frac{n^2}{(1+a)^n} \right| \leq \frac{3}{2(N-2)a^3} < \varepsilon.$$

□

问题 1.4. 求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{10}-7n^6+15n^3+10000000000000000000}{4n^{10}-18n^7+2n+0.0000000000000000001}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$.

Solutions. (1) $\dfrac{1}{4}$.

(2) 方法 1: 利用二项式定理, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\sum_{k=0}^{n^2}C_{n^2}^k\frac{1}{n^k}\geq C_{n^2}^1\frac{1}{n}=n.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=+\infty$.

方法 2: 利用已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. 由极限定义可知, 存在一个充分大的正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<e-2,\qquad\Longrightarrow\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>2.$$

因此,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}>2^n.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=+\infty$.

(3) 2021; 做如下放缩即可:

$$2021^n\leq 2^n+3^n+\cdots+2021^n\leq 2020\cdot 2021^n.$$

(4) 0; 我们需要对 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$ 做精细的估计. 由二项式定理,

$$n=(1+a_n)^n\geq C_n^3a_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a_n^3.$$

因此

$$0\leq\sqrt{n}a_n\leq\left(\frac{6n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

#

问题 1.5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

Sketch of Proof. Case 1. 若 $x_1 = \sqrt{3}$, 则可证明 $x_n = \sqrt{3}$, 显然收敛且极限为 $\sqrt{3}$.

Case 2. 若 $0 < x_1 < \sqrt{3}$, 则可以用归纳法证明 $x_{n+1} - x_n > 0$, 且 $0 < x_n < \sqrt{3}$. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 l. 在 $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边中令 $n \to \infty$, 得 $l = \dfrac{3(1+l)}{3+l}$. 从而解得 $l = \sqrt{3}$.

Case 3. 若 $0 < x_1 > \sqrt{3}$. 与第二种情况方法一致, 用归纳法证明 $x_{n+1} - x_n < 0$, 且 $x_n > \sqrt{3}$. #

问题 1.6. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且极限为 l. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = l$.

证明. 因 a_n 收敛, 故其有界, 不妨设 $|a_n - l| \le M$. 由极限的定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N_1 > 0$, 使得对任意 $n > N_1$, 有 $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - l\right| &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - l| \\ &\le \frac{N_1 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N_1}{n}\end{aligned}$$

因此, 只要 n 充分大, 使得 $N_1 M/n < \varepsilon/2$, 就有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - l\right| < \varepsilon.$$

故取

$$N_2 = \max\left\{\left[\frac{2N_1 M}{\varepsilon}\right] + 1, N_1\right\}$$

即可. □

Remark. 上述命题的逆命题不一定成立, 即数列的均值收敛并不意味着数列本身收敛. 考虑数列 $a_n = (-1)^n$. 显然 a_n 不收敛, 但 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$ (因为 $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \le 2$).

问题 1.7. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若其均值收敛, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l,$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

证明. 即 $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, 则 $a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$. 因此

$$\frac{a_n}{n} = b_n - \frac{n-1}{n} b_{n-1} \to l - l = 0.$$

□

问题 1.8. (1) 证明数列 $a_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) 证明 $\{a_n\}$ 的极限为 e.

Sketch of Proof. (1) 利用单调有界原理. 单调性是显然的. 对于 $n \geq 3$, 估计其上界:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leq 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\
&\leq 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 3 - \frac{1}{n} \leq 3.
\end{aligned}$$

(2) 由 e 的定义, $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. 我们需要估计 a_n 和 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 之间的关系.

首先, 由二项式定理,

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \cdots C_n^n \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1) \cdots 1}{n^n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n.
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 可知 $\lim a_n \geq e$.

对于上界的估计需要一定技巧. 我们任意取定一个正整数 m, 当 $n > m$ 时, 考虑 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的二项式展开中的前 m 项, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{m!} \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{n^m}.$$

令 $n \to \infty$, 可得

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = a_m.$$

因此我们证明了, 对于任意正整数 m, 都有 $a_m \leq e$, 这就证明了 $\lim a_n \leq e$. □

补充: Cauchy 收敛准则. 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 $n, m \geq N$, 都有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$\Longleftrightarrow$(等价表述) 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 $n \geq N$ 和 $p > 0$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

问题 1.9. 证明数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散.

证明. 利用 Cauchy 收敛准则的逆否命题. 对任意正整数 N, 取 $n = N, m = 2N$, 有

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2}.$$

□

问题 1.10. 利用不等式: $\frac{1}{1+n} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. 证明数列 $b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ 收敛.

证明. 利用单调有界原理. 先看单调性,

$$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0,$$

故 b_n 单调减. 再看有界性,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] > 0 \end{aligned}$$

□