7 傅里叶级数, Fourier Analysis

知识点回顾:

- 2π 周期函数傅里叶级数的概念.
- 任意周期函数的傅里叶级数; 函数的周期延拓和奇偶延拓.
- 傅里叶级数的收敛性, Parseval 等式.

问题 7.1. 设 $f(x)$ 是 2π 周期连续函数, 其傅立叶系数为 $a_0, a_n, b_n\,(n=1,2,\cdots)$. 求函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t+x)\,\mathrm{d}t$$

的傅立叶系数 A_0, A_n, B_n.

Solution. **Step 1.** 说明 F 是偶函数.

$$\begin{aligned}F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t-x)\,\mathrm{d}t &\xlongequal{(\text{换元 } s=t-x)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)f(s)\,\mathrm{d}s\\ &\xlongequal{(\text{利用周期性})} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)f(s)\,\mathrm{d}s=F(x).\end{aligned}$$

因此傅立叶系数 $B_n=0$.

Step 2. 计算 A_0.

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t+x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

计算内层积分, 固定 t, 利用 f 的周期性, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\pi a_0.$$

因此

$$A_0=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\pi a_0\,\mathrm{d}t=a_0^2.$$

Step 3. 计算 A_n.

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t+x)\,\mathrm{d}t\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

计算内层积分, 固定 t,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x&=\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(x)\cos n(x-t)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n(x-t)\,\mathrm{d}x\\ &=\cos nt\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\sin nt\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &=\pi(a_n\cos nt+b_n\sin nt).\end{aligned}$$

因此

$$A_n = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\pi\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\,\mathrm{d}t = a_n^2 + b_n^2.$$

#

问题 7.2 (傅里叶系数的渐近行为). 设 $f(x)$ 是 2π 周期的 k 阶连续可导函数, 证明其傅里叶系数当 n 充分大时, 有渐近行为 $a_n, b_n = O(n^{-k})$.

Sketch of Proof. 注意到, 因 f 是 2π 周期的, 而且 k 阶连续可导, 故 f 的直到 k 阶的各阶导数也是 2π 周期的. 因此不断分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left(f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\left(f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \cdots\cdots
\end{aligned}$$

可以证明

$$|a_n| \le \frac{1}{n^k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{C}{n^k}.$$

对于 b_n, 同理. #

问题 7.3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是连续 2π 周期函数, 其傅里叶级数分别为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx).$$

证明:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n).$$

Sketch of Proof. 对 $f, g, f+g$ 用 Parseval 等式即可. #

几道稍微复杂的往年期末题

问题 7.4 (2022). 定义函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

$$\theta(x)=\int_0^x\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t.$$

证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$$

收敛.

Sketch of Proof. **Step 1.** 验证 θ 严格单调增的 C^1 函数, 且 $\theta(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=+\infty$. 因此 $t=\theta(x)$ 可以看成 $[0,+\infty)$ 上的一个双射, 它有反函数 $x=s(t)$. 再利用反函数定理, 说明 s 也是 C^1 的, 而且

$$s'(t)=\frac{1}{\theta'(x)\big|_{x=s(t)}}=\frac{1}{(s(t)+1)(s(t)+2)(s(t)+3)}.$$

因此 $t=\theta(x)$ 可以看成 $[0,+\infty)$ 上的一个参数变换, 由换元公式,

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(\cos t)s'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Step 2. 由 $s'(t)$ 的表达式可知, $s'(t)>0$, 故 $s(t)$ 严格增. 因此 $s'(t)$ 严格单调减.

此外, 因 $s(t)$ 严格增, 且 $s(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的一个双射, 故当 $t\to+\infty$ 时, $s(t)\to+\infty$, 则 $s'(t)\to 0$.

至此, 我们证明了 $s'(t)$ 单调收敛到 0. 利用 Dirichlet 判别法, 可得

$$\int_0^{+\infty}(\cos t)s'(t)\,\mathrm{d}t$$

收敛. □

问题 7.5 (2022). 设 n 是给定的一个正整数.

(1) 对于任意常数 $a>0$, 证明含参变量 t 的无穷积分

$$J_n(t)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 对于每个 $t\in(0,+\infty)$, 求出 $J_n(t)$ 的值.

Sketch of Proof. (2) 验证积分号下求导的条件, 然后在积分号下对 t 求导, 得到递推关系

$$J_{n+1}(t)=-\frac{1}{n}J_n'(t).$$

再利用 $J_1(t)=\dfrac{\pi}{2}t^{-\frac{1}{2}}$, 不断求导, 得到 $J_n(t)$. #

问题 7.6 (2024)**.** 设 b 是实数.

(1) 证明含参变量 b 的无穷积分

$$I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$$

在 $b\in\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(2) 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x=e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Sketch of Proof. (1) 用 Weierstrass 判别法容易验证.

(2) 验证积分号下求导的条件, 然后在积分号下对 b 求导得到,

$$I'(b)=1-2bI(b).$$

解一阶线性 ODE 即可. #