9 多元函数的微分-1

知识点回顾:

- 多元函数的极限与连续性. 理清多元函数极限和累次极限之间的关系;
- 偏导数, 可微性. 以及可微和偏导数存在之间的关系;
- 方向导数和梯度.

问题 9.1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{当}x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{当}x^2+y^2=0.\end{cases}$$

关于每个变量 x 和 y 都是一元连续函数, 但作为二元函数它不是连续的.

Proof. 一元函数连续性容易验证. 但是当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 其二元极限不存在. 故它在原点处不是连续的. □

问题 9.2. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$.

Solution. 先计算一阶偏导数.

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

因此,

$$f'_x(0,y)=\begin{cases}-y, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

故 $f''_{xy}(0,0)=[f'_x(0,y)]'_y\Big|_{y=0}=-1$.

类似地, 可得

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

从而,

$$f_y'(x,0)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

故 $f_{yx}''(0,0)=[f_y'(x,0)]_x'\Big|_{x=0}=1.$ #

RMK. 这个例子说明, 混合偏导数一般来说与求导次序有关.

RMK. 对于 C^2(二阶连续可导) 函数 f 而言, 有 $f_{xy}''=f_{yx}''$.

问题 9.3. 求下列函数的偏导数:

(1) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

(2) $f(x,y)=x^{x^y}$.

Solutions. (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

(2) 先求对数, 有 $\ln f=x^y\ln x$ $(\star)$. 将 y 看成常数, 两边对 x 求导, 得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=x^{y-1}(1+y\ln x).$$

因此,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^{x^y}\cdot x^{y-1}(1+y\ln x).$$

类似地, 在 $(\star)$ 两边对 y 求导, 得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}=x^y(\ln x)^2.$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{x^y}\cdot x^y(\ln x)^2.$$

#

问题 9.4. (1) $f(x,y)=y^{\sin x}$, 求 $\mathrm{d}f$;

(2) $z=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, 求 $\mathrm{d}z\Big|_{(2,1)}$.

Solutions. (1) 先求偏导数, 关于 y 的偏导数是简单的, 直接计算得 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin xy^{\sin x-1}$.

关于 x 的偏导数, 我们先取对数, 得 $\ln f=\sin x\ln y$. 两边对 x 求导, 得到

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\ln y,\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial x}=y^{\sin x}\cos x\ln y.$$

因此,

$$\mathrm{d}x = y^{\sin x}\cos x\ln y\,\mathrm{d}x + \sin x y^{\sin x - 1}\,\mathrm{d}y.$$

(2) $z = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y+\frac{1}{y}}$, 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y+\frac{1}{y}}\bigg|_{(2,1)} = \frac{1}{2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(2,1)} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+\frac{1}{y}}}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\bigg|_{(2,1)} = 0.$$

因此, $\mathrm{d}z\Big|_{2,1} = \frac{\mathrm{d}x}{2}$. #

问题 9.5. 已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\sin y + \dfrac{1}{1-xy},\\ f(0,y) = 2\sin y + y^2.\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

Solution. 对任意给定的 y, 将等式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin y + \frac{1}{1-xy}$$

两边对 x 积分, 得

$$f(x,y) = -x\sin y - \frac{1}{y}\log|1-xy| + C(y).$$

结合边值条件, 有

$$2\sin y + y^2 = f(0,y) = C(y).$$

因此,

$$f(x,y) = (2-x)\sin y - \frac{1}{y}\ln|1-xy| + y^2.$$

#

问题 9.6. 设函数 $f(x,y)$ 在圆盘 $B_1 = \{x^2+y^2\le 1\}$ 内满足

$$\nabla f \equiv 0.$$

证明:f 为常函数.

Proof. 对任意 $(x,y)\in B_1$, 考虑一元函数

$$g(t) = f(tx,ty) - f(0,0), \qquad t\in[0,1].$$

对 t 求导, 得

$$g'(t) = f_x(tx,ty)x + f_y(tx,ty)y = \nabla f(tx,ty)\cdot(x,y) = 0.$$

故 g 恒为常数, 从而 $g(1) = g(0) = 0 \Longrightarrow f(x,y) = f(0,0)$. 由 (x,y) 的任意性, $f\equiv f(0,0)$. □

问题 9.7 (Euler 定理)**.** 称函数 $f(x,y)$ 是 α-齐次函数, 如果对任意 $t>0$ 和 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 都有

$$f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y). \tag{1}$$

证明: 设 f 是可微函数, 则 f 是 α-齐次的当且仅当

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=\alpha f(x,y). \tag{2}$$

Proof. (必要性) 设 f 是 α-齐次的, 在(1)两边对 t 求导, 得

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y).$$

取 $t=1$, 即得(2)成立.

(充分性) 设(2)成立, 为证(1), 对任意给定的 (x,y), 考虑辅助函数:

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^\alpha},\qquad t>0.$$

对 t 求导, 得

$$\varphi'(t)=\frac{(xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty))t^\alpha-\alpha t^{\alpha-1}f(tx,ty)}{t^{2\alpha}}$$

由(2)可知,

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=\frac{\alpha}{t}f(tx,ty).$$

因此, $\varphi'(t)\equiv 0$. 则 $\varphi(t)\equiv\varphi(1)$, 即得(1). □

问题 9.8. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 都是区域 D 上的 C^1 函数. 若存在 $u\in C^1(D)$, 使得

$$\nabla u=(P,Q)\qquad 或\qquad \mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$

证明:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Proof. 因 $\nabla u=(P,Q)\in C^1$, 故 $u\in C^2$. 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y}=u_{xy}=u_{yx}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

□

RMK. 用下学期的知识, 我们可以证明: 若 D 是单连通区域, 则上述命题的逆命题也成立. 即对于单连通区域 D, 和 $P,Q\in C^1(D)$. 若 $P_y=Q_x$, 则存在 $u\in C^2(D)$, 使得 $\nabla u=(P,Q)$.

这时, 我们称向量场 (P,Q) 为有势场, 标量函数 u 称为它的势 (potential) 函数. 这个性质虽然很简单, 但它在物理中的 Lagrange 力学, 在现代数学的很多领域, 例如辛几何、最优输运 (optimal transport) 中都很重要.

问题 9.9. (1) 设 $u \in C^2(B_1)$ 是调和函数, 即满足 $\Delta u = 0$. 令 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑凸函数 (即 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 且 $\varphi'' \geq 0$). 记 $v = \varphi(u)$, 证明: $\Delta v \geq 0$.

(2*) 设 $b \in C^2(B_1)$ 满足如下 *Jacobi* 不等式: $\Delta b \geq \varepsilon |\nabla b|^2$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为正常数. 令 $\widetilde{b} = e^{\varepsilon b}$, 证明:

$$\Delta \widetilde{b} \geq 2 \frac{|\nabla \widetilde{b}|^2}{\widetilde{b}}.$$

Proof. (1) 由链式法则, 得

$$\begin{aligned}
\nabla v &= \varphi'(u) \nabla u, \\
\Delta v &= \varphi''(u) |\nabla u|^2 + \varphi''(u) \Delta u \geq 0.
\end{aligned}$$

(2) 同样用链式法则, 得

$$\begin{aligned}
\nabla \widetilde{b} &= \varepsilon e^{\varepsilon b} \nabla b, \\
\Delta \widetilde{b} &= \varepsilon^2 e^{\varepsilon b} |\nabla b|^2 + \varepsilon e^{\varepsilon b} \Delta b.
\end{aligned}$$

从而,

$$\Delta \widetilde{b} - 2 \frac{|\nabla \widetilde{b}|^2}{\widetilde{b}} = \varepsilon e^{\varepsilon b} (\Delta b - \varepsilon |\nabla b|^2) \geq 0.$$

□