11 隐函数定理和极值问题

Theorem 11.1 (隐函数定理)**.** 设 $F = F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 附近是 C^1 的. 若 (x_0,y_0) 满足方程 $F(x_0,y_0)=0$, 而且

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上确定了隐函数 $y=f(x)$, 并且 $\boxed{f\in C^1(x_0-\delta,x_0+\delta)}$, 其导数为

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.$$

更一般的形式:

Theorem 11.2. 设 F,G 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 附近是 C^1 的. 若 (x_0,y_0,u_0,v_0) 满足方程组 $\begin{cases}F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0\\ G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0\end{cases}$, 而且在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 处的 *Jacobi* 行列式

$$J=\left|\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=F_uG_v-F_vG_u\neq 0.$$

则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域 $B_\delta(x_0,y_0)$ 内确定了隐函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$, 并且 $(u,v)\in C^1(B_\delta(x_0,y_0))$. 其导数可以通过链式法则来计算.

问题 11.3. 求下列方程确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数：

(1) $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$;

(2) $y^x-y-1=0$.

Solution. (1) 记 $F(x,y)=\sin(xy)-e^{xy}-x^2y$, 则

$$F_x=y\cos(xy)-ye^{xy}-2xy,$$
$$F_y=x\cos(xy)-xe^{xy}-x^2.$$

则对于使 $x\cos(xy)-xe^{xy}-x^2\neq 0$ 的 (x,y), 在 x 处, 隐函数 $y=y(x)$ 的导数为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y\cos(xy)-ye^{xy}-2xy}{x\cos(xy)-xe^{xy}-x^2}.$$

(2) 记 $F(x,y)=y^x-y-1$, 则

$$F_x=y^x\ln y,$$
$$F_y=xy^{x-1}-1.$$

则对于使 $xy^{x-1}-1\neq 0$ 的 (x,y), 在 x 处, 隐函数 $y=y(x)$ 的导数为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y^x\ln y}{xy^{x-1}-1}.$$

#

问题 11.4. 由方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ 确定函数 $z = z(x, y)$. 求 $x = 0, y = \dfrac{1}{2}, u = \dfrac{1}{2}, v = -\dfrac{1}{2}$ 时, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

Solution. 两种看法, 一种是直接利用这三个方程确定 (u, v, z) 是关于 (x, y) 的函数. 另一种看法是, 利用前两个方程确定 (u, v) 是关于 (x, y) 的函数, 再结合 $z = u^3 + v^3$ 得到 z 是关于 (x, y) 的函数. 我们采用第二种看法.

记 $F(x, y, u, v) = x - u - v, G(x, y, u, v) = y - u^2 - v^2$, 在 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 处, Jacobi 行列式

$$J = \left|\frac{D(F, G)}{D(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2u & -2v \end{vmatrix}_{(u,v)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = -2 \neq 0.$$

因此在 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 附近 (u, v) 是关于 (x, y) 的 C^1 函数.

在前两个方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1 = u_x + v_x \\ 0 = 2uu_x + 2vv_x \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = \dfrac{v}{v - u} \\ v_x = \dfrac{u}{u - v} \end{cases}$$

在 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 处, 有 $u_x = \dfrac{1}{2}, v_x = \dfrac{1}{2}$.

同样, 在前两个方程两边对 y 求导, 得

$$\begin{cases} 0 = u_y + v_y \\ 1 = 2uu_y + 2vv_y \end{cases} \implies \begin{cases} u_y = \dfrac{1}{2(u - v)} \\ v_y = \dfrac{1}{2(v - u)} \end{cases}$$

在 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 处, 有 $u_y = \dfrac{1}{2}, v_y = -\dfrac{1}{2}$.

最后, 由链式法则, 在 $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 处, 有

$$z_x = 3(u^2 u_x + v^2 v_x) = \frac{3}{4}$$
$$z_y = 3(u^2 u_y + v^2 v_y) = 0.$$

#

问题 11.5. 假设 C^1 函数 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 有 C^1 反函数 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$. 证明:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1.$$

Proof. 由 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，其中 $x = x(u,v), y = y(u,v)$. 在两端对 u 求导, 得

$$\begin{cases} 1 = u_x x_u + u_y y_u \\ 0 = v_x x_u + v_y y_u \end{cases}$$

解二元一次方程, 得

$$x_u = \frac{v_y}{u_x v_y - u_y v_x}, \qquad y_u = -\frac{v_x}{u_x v_y - u_y v_x}$$

两端对 v 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 0 = u_x x_v + u_y y_v \\ 1 = v_x x_v + v_y y_v \end{cases}$$

解二元一次方程, 得

$$x_v = -\frac{u_y}{u_x v_y - u_y v_x}, \qquad y_v = -\frac{u_x}{u_x v_y - u_y v_x}.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} &= \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u \\ &= \frac{u_x v_y - u_y v_x}{(u_x v_y - u_y v_x)^2} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}. \end{aligned}$$

□

问题 11.6. 设

$$\begin{cases} xu + yv = 0, \\ uv - xy = 5. \end{cases}$$

求当 $x = 1, y = -1, u = 2, v = 2$ 时, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ 的值.

Solution. 记 $F(x,y,u,v) = xu + yv, G(x,y,u,v) = uv - xy - 5$. 在 $(1,-1,2,2)$ 处, Jacobi 行列式

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ v & u \end{vmatrix} = xu - yv\Big|_{(x,y,u,v)=(1,-1,2,2)} = 4 \neq 0$$

故在 $(x,y) = (1,-1)$ 附近, 该方程组确定了 (u,v) 是关于 (x,y) 的 C^1 函数.

在方程组两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} u + x u_x + y v_x = 0, \\ u_x v + u v_x - y = 0. \end{cases}$$

由此解得,

$$u_x = -\frac{u^2+y^2}{xu-yv}, \qquad v_x = \frac{xy+uv}{xu-yv}.$$

在方程组两边对 y 求导, 得

$$\begin{cases} xu_y + v + yv_y = 0, \\ u_y v + uv_y - x = 0. \end{cases}$$

由此解得,

$$u_y = \frac{uv+xy}{xu-yv}, \qquad v_y = \frac{x^2+y^2}{xu-yv}.$$

当 $(x,y,u,v) = (1,-1,2,2)$ 时,

$$u_x = -\frac{5}{4}, \quad u_y = -\frac{3}{4}$$
$$v_x = \frac{3}{4}, \quad v_y = \frac{5}{4}.$$

下面求二阶导数. 因 (u,v) 在 $(x,y) = (1,-1)$ 附近是 C^1 的, 由前面计算的表达式可知, u_x, u_y, v_x, v_y 在 $(x,y) = (1,-1)$ 附近也是 C^1 的. 由此, 直接求导即可求得二阶导数.

$$u_{xx} = \partial_x\left(-\frac{u^2+y^2}{xu-yv}\right) = -\frac{2uu_x(xu-yv)-(u^2+y^2)(u+xu_x-yv_x)}{(xu-yv)^2}\bigg|_{(x,y,u,v)=(1,-1,2,2)} = \frac{55}{32}.$$

$$v_{xy} = \partial_y\left(\frac{xy+uv}{xu-yv}\right) = \frac{(x+u_yv+uv_y)(xu-yv)-(xy+uv)(xu_y-v-yv_y)}{(xu-yv)^2}\bigg|_{(x,y,u,v)=(1,-1,2,2)} = \frac{25}{32}.$$

问题 11.7. 求函数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在约束条件 $x+y=A$, $A>0$ 下的最小值. 并由此证明:

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

Proof. 考虑 Lagrange 乘子:

$$F(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}(x^n+y^n) + \lambda(x+y-A).$$

解方程组:

$$\begin{cases} F_x = \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0, \\ F_y = \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0, \\ F_\lambda = x+y-A = 0. \end{cases}$$

解得

$$x = y = \frac{A}{2}, \qquad \lambda = -\frac{n}{2^n}A^{n-1}.$$

代入 $\lambda = -\frac{n}{2^n}A^{n-1}$, 在 $(x,y) = \left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$ 处, F 的 Hessian 矩阵

$$D^2F\left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2^{n-1}}A^{n-2} & 0 \\ 0 & \frac{n(n-1)}{2^{n-1}}A^{n-2} \end{pmatrix}$$

是正定的. 因此 $(x, y) = \left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$ 是条件极小值点. 又因为它是唯一的极值点, 故它还是最小值点. 因此在约束条件 $x + y = A$ 下, 有

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) \geq \left(\frac{A}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

#