# 8 解析几何

知识点回顾:

- 向量运算;
- 直线和平面的表示, 直线和平面之间的关系;
- 点到平面距离, 点到直线距离; 异面直线之间的距离.

**问题 8.1.** 判断直线 $l_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ 与直线 $l_2 : \begin{cases} x = -2 \\ y = t+1 \\ z = -2t+2 \end{cases}$ 之间的关系.

*Solution.* 直线 $l_1$ 过 $P = (1, 0, -1)$, 方向向量为 $v_1 = (-1, 2, 1)$; 直线 $l_2$ 过 $Q = (-2, 1, 2)$, 方向向量为 $v_2 = (0, 1, -2)$. 因 $v_1, v_2$ 不平行, 故 $l_1, l_2$ 不平行.

下面来判断它们是否相交. 将 $l_1$ 表示为 $\begin{cases} x = -s+1 \\ y = 2s \\ z = s-1 \end{cases}$. 判断是否存在 $s, t$, 使得

$$\begin{cases} -s+1 = -2 \\ 2s = t+1 \\ s-1 = -2t+2 \end{cases}$$

该方程组无解, 故 $l_1, l_2$ 不相交. 因此 $l_1, l_2$ 异面. #

另一种方法. $\overrightarrow{PQ} = (-3, 1, 3)$, 计算

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (v_1 \times v_2) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

因此, $l_1, l_2$ 异面. #

**问题 8.2.** 求到直线 $l_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ 与直线 $l_2 : \begin{cases} x = -2 \\ y = t+1 \\ z = -2t+2 \end{cases}$ 距离相等, 且与 $l_1, l_2$ 平行的平面的方程.

*Solution.* 记该平面为 $\Pi$, 其法向量记为 $n$. 因 $\Pi \parallel l_1$, 且 $\Pi \parallel l_2$, 故 $n \perp v_1$, $n \perp v_2$. 从而 $n \parallel (v_1 \times v_2)$, 不妨就取

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, -2, -1).$$

从而 $\Pi$ 的方程可设为 $-5x-2y-z+D=0$. 由因为 $l_1,l_2$ 到 $\Pi$ 距离相等, 故 $d(P,\Pi)=d(Q,\Pi)$. 则

$$\frac{|-5+1+D|}{\sqrt{25+4+1}}=\frac{|10-2-2+D|}{\sqrt{25+4+1}} \quad\Longrightarrow\quad D=-1.$$

综上, 平面 $\Pi$ 的方程是 $-5x-2y-z-1=0$. #

**问题 8.3.** 平面 $\Pi: 6x+2y-9z=121$, 求原点关于平面 $\Pi$ 的对称点.

*Solution. Step 1.* 过原点向 $\Pi$ 做垂线, 求出垂线方程. 因垂线过原点, 其方向向量 $=$ 平面 $\Pi$ 的法向量 $=(6,2,-9)$, 故垂线方程为

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-9} \qquad 或 \qquad \begin{cases} x=6t \\ y=2t \\ z=-9t \end{cases}.$$

*Step 2.* 求垂线与平面 $\Pi$ 的交点. 将垂线的参数方程带入平面 $\Pi$ 的方程, 得

$$36t+4t+81t=121 \qquad\Longrightarrow\qquad t=1.$$

故交点为 $P=(6,2,-9)$.

*Step 3.* 设原点 $O$ 关于 $\Pi$ 的对称点为 $\widetilde{O}$. 则 $\overrightarrow{O\widetilde{O}}=2\overrightarrow{OP}=(12,4,-18)$. #

**问题 8.4.** 求参数 $l,k$, 使得平面 $\Pi_1: x+ly+kz=1$ 与平面 $\Pi_2: x+y-z=8$ 垂直, 而且使 $\Pi_1$ 过 $\left(1,1,-\frac{2}{3}\right)$.

*Solution.* 因 $\Pi_1\perp\Pi_2$, 故它们的法向量互相垂直, 从而得到

$$0=(1,l,k)\cdot(1,1,-1)=1+l-k.$$

又因为 $\Pi_1$ 过 $\left(1,1,-\frac{2}{3}\right)$, 则

$$1+l-\frac{2}{3}k=1.$$

联立两方程, 解得 $k=3, l=2$. #

**问题 8.5.** 求参数 $m$ 的值, 使得 $l_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z}{-3}$ 与 $l_2: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-3}{0}$ 相交.

*Solution.* $l_1$ 与 $l_2$ 相交 $\Longleftrightarrow l_1$ 与 $l_2$ 共面而且不平行.

直线 $l_1$ 过 $P=(3,1,0)$, 方向向量为 $v_1=(2,m,-3)$; 直线 $l_2$ 过 $Q=(-2,4,3)$, 方向向量为 $v_2=(3,-4,0)$. 因 $\frac{2}{3}\neq\frac{-3}{0}$, 故 $v_1,v_2$ 不平行.

要使 $l_1,l_2$ 共面, 则需要

$$0=\overrightarrow{PQ}\cdot(v_1\times v_2\begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 2 & m & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=9m-9 \quad\Longrightarrow\quad m=1.$$

#

**问题 8.6.** 判断直线 $l_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{3}$ 与直线 $l_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-2}{1}$ 之间的关系, 并求它们之间的距离.

*Solution.* 直线 $l_1$ 过 $P = (3,0,0)$, 方向向量为 $v_1 = (2,4,3)$; 直线 $l_2$ 过 $Q = (-1,3,2)$, 方向向量为 $v_2 = (2,0,1)$.

先计算

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (v_1 \times v_2) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0,$$

故 $l_1, l_2$ 异面. 下面求它们之间的距离.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4,4,-8).$$

故

$$d(l_1,l_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (v_1 \times v_2)|}{|v_1 \times v_2|} = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

#