7 中值定理与 Taylor 展开-2

问题 7.1. 设 $f\in C^1[0,+\infty), f(0)=0$. 若存在实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|, \forall x\in[0,+\infty)$. 证明:$f\equiv 0$.

Proof. 由 Lagrange 中值定理, 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 存在 $\xi_1\in(0,x)$, 使得

$$|f(x)|=|f(0)+f'(\xi_1)x|=|f'(\xi_1)|x\le A|f(\xi_1)|x.$$

特别地, 当 $x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 时, 存在 $\xi_1\in(0,x)$, 使得 $|f(x)|\le\frac{1}{2}|f(\xi_1)|$.

对 ξ_1 重复上面的论证, 可以得到 $\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使得 $|f(\xi_1)|\le\frac{1}{2}|f(\xi_2)|$. 如此重复下去, 我们可以得到

$$0<\cdots<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x\le\frac{1}{2A},$$

使得

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}|f(\xi_1)|\le\frac{1}{4}|f(\xi_2)|\le\cdots\le\frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|.$$

由 f 的连续性, f 在 $\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 上有界, 记 $M=\max_{x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]}|f(x)|$. 因此

$$|f(x)|\le\frac{M}{2^n},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

令 $n\to\infty$, 得 $f(x)=0$. 由 f 的任意性, f 在 $\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 上恒为 0. 通过平移, 可以证明 f 在每个 $\left[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}\right]$ 上都恒为 0. □

问题 7.2. 设 $f\in C^1(0,+\infty)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Proof. 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $x>A$ 时, 有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再由 Lagrange 中值定理, 对任意 $x>A$, 存在 $\xi\in(A,x)$, 使得 $f(x)=f(A)+f'(\xi)(x-A)$. 此时

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{f(A)}{x}\right|+|f'(\xi)|\frac{x-A}{x}<\frac{|f(A)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 x 充分大, 使得 $\frac{|f(A)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}$, 即得 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$. □

问题 7.3. 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 且有界. 证明: 存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(x_0)=0$.

Proof. 若 f'' 变号, 由 Darboux 中值定理, 结论成立. 因此, 我们假设 $f''>0$. 则 f' 严格增. 取 x_0 使得 $f'(x_0)\ne0$.

若 $f'(x_0)>0$, 则对任意 $x>x_0$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

令 $x \to +\infty$, 得 $f(x) \to +\infty$, 与 f 有界矛盾.

类似地, 若 $f'(x_0) < 0$, 则对任意 $x < x_0$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x, x_0)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $x \to -\infty$, 同样得到 $f(x) \to +\infty$, 与 f 有界矛盾. □

问题 7.4. *设 $f \in C^2[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 且 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 2$. 证明: $\min\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \le -16$.*

Proof. 因 f 连续, 故可设 x_0 是 f 的最大值点. 又因 $f(0) = f(1) = 0$, 故 $x_0 \in (0,1)$. 由 Fermat 原理, 有 $f'(x_0) = 0$.

在 $x = x_0$ 处对 f 进行带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使得

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2 = 2 + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2; \\ 0 = f(1) &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = 2 + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\min_{x\in[0,1]} f''(x) \le \min\{f''(\xi), f''(\eta)\} = \min\left\{-\frac{4}{x_0^2}, -\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}.$$

当 $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时,

$$\min\left\{-\frac{4}{x_0^2}, -\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\} = -\frac{4}{x_0^2} \le -16.$$

当 $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时,

$$\min\left\{-\frac{4}{x_0^2}, -\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\} = -\frac{4}{(1-x_0)^2} \le -16.$$

□

问题 7.5. *设 $f \in C^2[a,b]$, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得*

$$|f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

Proof. 应用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 a, b 点处展开. 故存在 ζ, η 满足 $a < \zeta < \frac{a+b}{2} < \eta < b$, 使得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{1}{2}f''(\zeta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2; \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{1}{2}f''(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

两式相减, 得

$$f(b) - f(a) + \frac{1}{8}[f''(\eta) - f''(\zeta)](b-a)^2 = 0.$$

从而

$$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le \frac{1}{2}(|f''(\zeta)|+|f''(\eta)|).$$

取

$$\xi = \begin{cases} \zeta, & \text{如果}|f''(\zeta)| \ge |f''(\eta)|, \\ \eta, & \text{如果}|f''(\zeta)| < |f''(\eta)|. \end{cases}$$

□

问题 7.6. 设 $f \in C^2(0,+\infty)$, 且对任意 $x>0$ 有

$$|f(x)| \le A, \qquad |f''(x)| \le B.$$

证明:

$$|f'(x)| \le 2\sqrt{AB}, \quad \forall\, x \in (0,+\infty).$$

Proof. 对任意 $x, h>0$, 应用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2.$$

从而,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|\frac{f(x+h)-f(x)-\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2}{h}\right| \\ &\le \frac{1}{h}(|f(x+h)|+|f(x)|) + \frac{h}{2}|f''(x+\theta h)| \\ &\le \frac{2A}{h} + \frac{h}{2B}. \end{aligned}$$

这个不等式对任意 $h>0$ 都成立. 记函数 $g(h) = 2A/h + h/2B$, 因此 $|f'(x)| \le \min_{h>0} g(h)$. 下面我们来求 g 的最小值. 考虑 $g'(h)=0$, 解得正根 $h_0 = 2\sqrt{A/B}$. 计算得 $g(h_0) = 2\sqrt{AB}$. 另外由平均值不等式可知, $g \ge 2\sqrt{AB}$. 因此 $2\sqrt{AB}$ 确为 g 的最小值. 综上

$$|f'(x)| \le 2\sqrt{AB}.$$

□

问题 7.7 (∗). 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为 n 个给定的正数. 证明在区间 $[0,1]$ 内存在一组互不相等的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

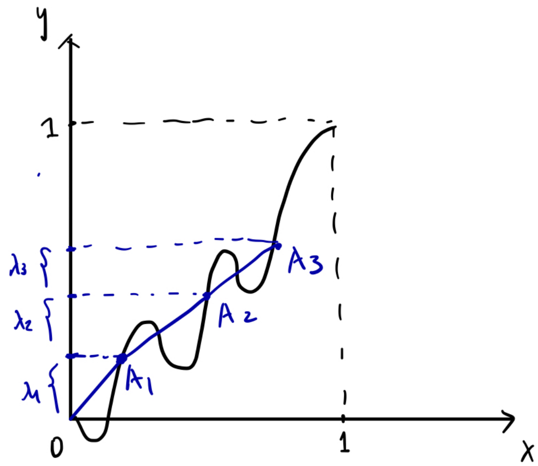
IDEA. 记 $\lambda_i = k_i/\sum_i k_i$. 因此我们需要找到 n 个点 $x_1, \cdots, x_n$, 使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n}{f'(x_n)} = 1.$$

根据 Lagrange 中值定理, 这等于说, 要在 f 的图像上找到 n 个不同的线段, 使得其相应的斜率 $\tan\alpha_i$ 满足

$$\frac{\lambda_1}{\tan\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\tan\alpha_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\tan\alpha_n} = 1.$$

若把 λ_i 看成线段在 y 轴上的投影, 则 $\lambda_i/\tan\alpha_i$ 为该线段在 x 轴上的投影. 即如下图所示:



Proof. 记 $\lambda_i = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j}$, 则 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. 因 f 连续, 由介值定理, 存在 $c_1 \in (0,1)$, 使得 $f(c_1) = \lambda_1$. 因 $\lambda_1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$, 再用介值定理, 存在 $c_2 \in (c_1, 1)$, 使得 $f(c_2) = \lambda_1 + \lambda_2$. 如此重复下去, 可以依次得到 $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = 1$, 使得

$$f(c_i) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j.$$

记 $c_0 = 0$, 利用 Lagrange 中值定理, 存在 $x_i \in (c_{i-1}, c_i)$, 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}}.$$

故

$$\frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = c_i - c_{i-1}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}(c_i - c_{i-1}) = c_n - c_0 = 1.$$

$\square$