6 中值定理与 Taylor 展开

知识点回顾:

- Rolle 中值定理, Lagrange 中值定理, *Cauchy 中值定理;
- L' Hospital 法则;
- Taylor 展开: Peano 余项和 Lagrange 余项.
- 极值原理. Idea of Maximum Principle in “PDE”

问题 6.1. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Solution. (1) 等价无穷小替换：$x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, 故 $\sin^3 x\sim x^3$, 分母 $x\sin^3 x\sim x^4$; 在利用 Taylor 展开：$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$(展到 x^4 项), 故分子可化简为: $1-x^2-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)+o(x^4)=-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$; 因此

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{2}$$

(2) 做变形

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\log x}\cdot\log\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}.$$

下计算指数上的极限, 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log x}\cdot\log\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{-x}{1+x^2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/x^2}{-1/1+x^2}=-1.\end{aligned}$$

因此, 原极限 $=e^{-1}$.

(3) 利用 Taylor 展开：$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ (展到 x^2 项, 故分子可化简为 $\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)-(1+x)+o(x^2)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. 因此

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

(4) 利用等价无穷小 $\sin x\sim x$ 和 Taylor 展开 $\sin x-x\sim-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, 可知

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^2}=0$$

#

问题 6.2. 求函数

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

在 $x = 0$ 处的 *Taylor* 展开 *(*展到 x^4 项*)*, 并求 $f^{(4)}(0)$.

Solution. 将 f 变形再利用 $\dfrac{1}{1-x}$ 的 Taylor 展开, 可知

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2x}{1-x+x^2} = 1 + \frac{2x}{1-(x-x^2)} \\ &= 1 + 2x[1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2 + (x-x^2)^3 + o(x^3)] \\ &= 1 + 2x + 2x^3 - 2x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

看其 x^4 项系数可知,

$$-2 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{(4)} = -48.$$

#

问题 6.3. 设 $f \in C[a, +\infty)$, 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. 证明*:* 存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

Proof. 若 $f \equiv f(a)$, 则结论显然. 故不妨设存在 $b > 0$, 使得 $f(b) > f(a)$. 任取 $\eta \in (f(a), f(b))$. 由连续函数的介值定理, 存在 $x_1 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) = \eta$.

另一方面, 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, 故存在 $A > 0$, 使得对于任意 $x \in [A, +\infty)$, 有

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\eta - f(a)}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \le \frac{\eta + f(a)}{2} < \eta.$$

特别地, $f(A) < \eta$. 在区间 $[b, A]$ 上再用介值定理可知, 存在 $x_2 \in (b, A)$, 使得 $f(x_2) = \eta$.

最后, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in [x_1, x_2]$, 使得 $f'(\xi) = 0$. □

问题 6.4. 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 其中 $x_1 \neq x_2$. 证明*:*

(1) 存在 $\xi_1 \in [x_1, x_2]$, 使得 $f(\xi_1) + f'(\xi_1) = 0$;

(2) 存在 $\xi_2 \in [x_1, x_2]$, 使得 $\sin\xi_2 \cdot f(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0$;

Proof. (1) 考虑辅助函数 $F(x) = e^x f(x)$, 则 $F(x_1) = F(x_2) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1 \in [x_1, x_2]$, 使得

$$0 = F'(\xi_1) = e^{\xi_1}(f(\xi_1)) + f'(\xi_1).$$

(2) 同样的方法, 考虑辅助函数 $G(x) = e^{-\cos x} f(x)$ 即可.

问题 6.5 (Darboux 中值定理; 导函数的介值性)**.** 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(a) < f'(b)$. 证明*:* 对任意 $\xi \in (f'(a), f'(b))$, 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \xi$.

Proof. 考虑 $g(x) = f(x) - \xi x$, 我们希望证明存在 $c \in (a,b)$, 使得 $g'(c) = 0$.

首先, $g'(a) = f'(a) - \xi < 0$. 我们断言, 一定存在 $x_1 \in (a,b)$, 使得 $g(x_1) < g(a)$. 若不然, 则 $g(x) \geq g(a), \forall x \in (a,b)$. 从而

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0. \qquad \text{矛盾!}$$

同样的方法, 因 $g'(b) = f'(b) - \xi > 0$, 故存在 $x_2 \in (a,b)$, 使得 $g(x_2) < g(a)$. 因此, g 在 $[a,b]$ 上的最小值不会在边界上取到, 只会在内部取到. g 的内部最小值点即是导数为 0 的点 (Fermat 原理). □

极值原理 (Maximum Principle)

极值原理是现代偏微分方程 (PDE) 研究中最基本、最重要的工具. 究其本质, 它只用到了如下结论:

Proposition 6.6. (1) [Fermat 原理] 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 若 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 若 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的极大值点, 则 $f''(x_0) \leq 0$; 若 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的极小值点, 则 $f''(x_0) \geq 0$.

Proposition 6.7 (弱极值原理)**.** 对于二阶可导的凸函数, 它的最大值一定在边界上达到.

即设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'' \geq 0$, 则

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}.$$

Corollary 6.8 (比较原理)**.** 设 f, g 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且

$$\begin{cases} f'' \leq g''; \\ f(a) \geq g(a), \quad f(b) \geq g(b). \end{cases}$$

则 $f \geq g$.

Proposition 6.9 (强极值原理)**.** 对于二阶可导的凸函数, 若它在内部取到最大值, 则它只能为常函数.

即设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'' \geq 0$. 若 f 在 $x_0 \in (a,b)$ 处取得最大值, 则 $f \equiv f(x_0)$.

问题 6.10. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $|f''(x)| \leq 1$. 证明:

$$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}.$$

Proof. 定义 $\widetilde{f}(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $f(0) = f(1) = 0$. 考虑 $g(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$, $h(x) = -\dfrac{x(x-1)}{2}$. 则

$$\begin{cases} h'' \geq f'' \geq g'' \\ h(0) = \widetilde{f}(0) = g(0) = 0 \\ h(1) = \widetilde{f}(1) = g(1) = 0 \end{cases}$$

由比较原理, $g \geq \widetilde{f} \geq h$. □.