4 不定积分与定积分-1

知识点回顾:

- 原函数和 Riemann 和的基本概念;
- 可积的条件
- 不定积分和定积分的计算: 分部积分、换元;
- 微积分基本定理 ($\star$).

RMK. 可积与有原函数之间的关系.

Eg.1 可积未必有原函数, 考虑例子: $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1]; \\ 1, & x \in (1,2]. \end{cases}$

Eg.2 有原函数未必可积, 考虑例子 $f_2(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 它有原函数

$$F_2(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

但 f_2 无界, 故不可积.

Eg3. 又有原函数又可积的函数甚至未必连续, 考虑例子: $f_3(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

问题 4.1. 计算下列不定积分*:*

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$*;*

(2) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$*;*

(3) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$*;*

Solution. (1) 考虑换元 $t = \cos x$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int t - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C \\ = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) + C. \end{aligned}$$

(2) 配方得, $\sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{4-(x+1)^2}$. 从而做三角换元, $x+1 = 2\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. 因此

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int 1+\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\theta + \sin 2\theta + C.$$

下面回代为 x 的函数. 首先 $\theta=\arcsin\frac{x+1}{2}$. 其次, 因为 $\sqrt{3-2x-x^2}=2\cos\theta$, 故

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}=\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}.$$

综上,

$$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x=2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C.$$

(3) 分部积分两次得,

$$\begin{aligned}\int\sin(\log x)\,\mathrm{d}x&=x\sin(\log x)-\int\cos(\log x)\,\mathrm{d}x\\&=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)-\int\sin(\log x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此,

$$\int\sin(\log x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\sin(\log x)-\cos(\log x)]+C.$$

问题 4.2. 计算积分: $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

Solution. 分部积分, 得

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.\end{aligned}$$

因此, 有递推关系:

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

结合 $I_0=\pi/2, I_1=1$, 有

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

#

问题 4.3. 证明 *Cauchy-Schwatrz* 不等式: 设 f,g 可积, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}.$$

Proof. 定义关于 λ 的函数:

$$p(\lambda)=\int_a^b(f(x)+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x=\lambda^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

如此定义的 $p(\lambda)$ 显然非负, 而且它是关于 λ 的二次多项式. 因此其判别式 $\Delta \le 0$, 即

$$0 \ge \Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

□

问题 4.4. 证明 *Sobolev* 不等式*:* 设 $f \in C^1[0,1]$, 则

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \le \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Proof. 首先, 因 $|f|$ 连续, 由积分中值定理, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = |f(\xi)|.$$

另一方面, 对任意 $x \in [0,1]$, 由微积分基本定理, 有

$$|f(x) - f(\xi)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\xi f'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\min\{x,\xi\}}^{\max\{x,\xi\}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$|f(x)| \le |f(x) - f(\xi)| + |f(\xi)| \le \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

问题 4.5. 证明 *Poincaré* 不等式*:* 设 $f \in C^1[0,1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 则

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 由微积分基本定理和 Cauchy-Schwartz 不等式, 可得对任意 $x \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^x f'(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\le \left(\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right) \le x\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

再对 x 在 $[0,1]$ 上积分, 即得到

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 4.6. 设 $f \in C[a,b]$ 且单调增, 证明*:*

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 定义辅助函数:

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in[a,b].$$

要证 $F(b)\geq 0$. 显然 $F(a)=0$, 且 F 连续可导, 其导数为

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0.$$

因此, F 单调增. 故 $F(b)\geq F(a)=0$. □

积分与极限交换次序的问题.

问题 4.7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x$.

Solution. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}0\leq\int_0^1\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}1\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{1}{nx^5}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4\varepsilon^4}-\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon^5}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\int_0^1\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+nx^5}\,\mathrm{d}x=0.$$

#

问题 4.8 (Riemann-Lebesgue 引理)**.** (1) 设 $f\in C^1[0,2\pi]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

(2) 若 f 只是 $[0,2\pi]$ 上的可积函数, 上述结论是否还成立?

Proof. (1) 直接分部积分, 得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|&=\left|-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}\cos nx\right|\\&=\frac{1}{n}\left|f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq\frac{1}{n}\left[|f(0)|+|f(2\pi)|+\int_0^{2\pi}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right]\to 0\qquad\text{as } n\to\infty.\end{aligned}$$

(2) 结论仍然成立, 但证明需要一定技巧.

因 f 可积, 故有界, 设 $|f| \leq M$.

对任意给定的 n, 记 $k = [\sqrt{n}]$. 将区间 $[0, 2\pi]$ k 等分, 分点为 $x_i = \frac{2\pi}{k} i, i = 0, 1, \cdots, n$. 记 ω_i 为 f 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 由 Riemann 可积的定义, 因当 $n \to \infty$ 时, $k \to \infty$(划分足够细), 故

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 注意到,

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx \, \mathrm{d}x \right| = \frac{1}{n} |\cos nx_i - \cos nx_{i-1}| \leq \frac{2}{n}.$$

故

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right| &= \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1})) \sin nx \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} M \frac{2}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta x_i + \frac{2M}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

□