3 导数

知识点回顾:

- 导数的概念及计算;
- 复合函数和反函数求导 (链式法则);
- 可微的概念;
- 高阶导数的计算.

问题 3.1. 求参数 a, b, c 使得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 其中

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ ax^4 - bx^2 + c, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Solution. 因为当 $x \neq \pm 1$ 时, $f(x)$ 在 x 附近都是初等函数. 故要使分段函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，只需验证：$f(x)$ 在分段点 $x = \pm 1$ 处连续；$f(x)$ 在分段点 $x = \pm 1$ 处左右导数相等. 又因 f 是偶函数, 故只需考虑 $x = 1$ 处即可.

Step 1. $x = 1$ 处的连续性. 因

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0,$$

故 f 在 $x = 1$ 处连续, 当且仅当

$$a - b + c = 0.$$

Step 2. $x = 1$ 处的可导性. 计算左导数:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}} - 0}{x - 1} = \lim_{y \to +\infty} -ye^{\frac{y^2}{1-2y}} = 0. \qquad \left(\text{这里做了换元 } y = -\frac{1}{x-1}\right)$$

计算右导数, 利用 $c = b - a$, 得

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax^4 - bx^2 + c}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{a(x^4 - 1) - b(x^2 - 1)}{x - 1} = 4a - 2b.$$

因此, f 在 $x = 1$ 处可导, 当且仅当

$$4a - 2b = 0.$$

综上, 只需选取 a, b, c 满足 $a : b : c = 2 : 1 : 1$ 即可. #

问题 3.2. 计算函数 $f(x) = x^{\arcsin x}$ 的导函数 $f'(x)$.

Solution. 将 f 表示成如下形式:

$$f(x) = e^{\arcsin x \cdot \log x}.$$

利用链式法则, 有

$$f'(x) = e^{\arcsin x \cdot \log x} \cdot (\arcsin x \cdot \log x)' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

#

问题 3.3. *考虑参数方程确定的函数:* $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ *. 求* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *和* $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

Solution. Step 1: 计算一阶导数.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

Step 2: 计算二阶导数. 将 $t = t(x)$ 看成 x 的函数, 它是 $x = \cos^3 t$ 的反函数. 由反函数求导的公式, 可得

$$t'(x) = -\frac{1}{3\cos^2(t(x))\sin(t(x))}.$$

因此, 在 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan t(x)$ 中对 x 求导, 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{t'(x)}{\cos^2 t(x)} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t}.$$

Step 2:* 另一种计算二阶导数的看法. 由 Step 1 可得, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 作为关于 x 的函数, 它是由参数方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan t \end{cases}$ 确定的, 因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t}.$$

#

问题 3.4. *设函数* $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$*, 其中* n *为正整数. 求* $f^{(n)}(x)$*.*

Solution. 当 $n = 1$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. 当 $n = 2$ 时, $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$. 当 $n = 3$ 时, $f'''(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. 因此猜测:

$$f^{(n)}(x) = \left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

下面用归纳法来证明此结论. 假设其对于 $n = k$ 成立, 来看 $n = k+1$ 的情况.

此时, $f(x) = x^k e^{\frac{1}{x}}$。由乘法法则:

$$f'(x) = kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{k-2}e^{\frac{1}{x}}$$

对其求 k 阶导数，结合归纳假设，得

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= k\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} - \left[\left(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\right]' \\
&= \frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right)' \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

因此, 有数学归纳法, 猜测成立. #

问题 3.5. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

证明: f 任意阶连续可导, 而且对于任意正整数 n, 有 $f^{(n)}(0) = 0$.

Sketch of Proof. 对于 $x \neq 0$, f 是初等函数, 因此任意阶连续可导. 此外直接计算, 有 $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. 因此我们猜测, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $x \neq 0$, 有

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 P_n 是一个多项式.

下面用归纳法证明此猜测. 假设其对于 $n = k$ 成立, 即

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

来看 $n = k + 1$ 得情况. 直接求导得,

$$f^{(k+1)}(x) = \left[-\frac{2}{x^3}P_k\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

注意到 P_k 和 P_k' 仍是多项式, 因此该猜测对 $n = k + 1$ 也成立. 由数学归纳法, 猜测成立. 利用此结论我们可以归纳地证明 $f^{(n)}(0) = 0$. #

问题 3.6. 设 $f(x) = (\arcsin x)^2$, 求 $f^{(n)}(0)$.

Solution. 由

$$f'(x) = 2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

可得如下关系式:

$$(1-x^2)(f'(x))^2 = 4f(x).$$

再求一次导数, 得

$$-2x(f'(x))^2 + 2(1-x^2)f'(x)f''(x) = 4f'(x).$$

因为 $f'(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内均不为 0, 故对于 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, 成立

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2.$$

又因为 f 是初等函数, 故它的各阶导数均连续, 从而上式在 $x=0$ 处也成立. 利用 Lebniz 公式, 对上式求 n 阶导数, 得

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0.$$

取 $x=0$, 得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$$

直接计算可知 $f'(0)=0, f''(0)=2$, 故

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{如果 } n=2k-1 \text{ 为奇数;}\\ (2k-2)^2\cdot(2k-4)^2\cdot\cdots\cdot 2^2\cdot 2, & \text{如果 } n=2k \text{ 为偶数;}\end{cases}$$

#

问题 3.7. *设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且 $f'(0)$ 存在.*

(1) 如果正序列 $\{x_n\}$ 和负序列 $\{y_n\}$ 都趋于 0, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是任意两个趋于 0 的序列, 是否还成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$?

Solution. (1) 注意到如下拆分:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}&=\frac{x_n}{x_n-y_n}\cdot\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}-\frac{y_n}{x_n-y_n}\cdot\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n}\\&=\left(1+\frac{y_n}{x_n-y_n}\right)\cdot\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}-\frac{y_n}{x_n-y_n}\cdot\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n}\\&=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}+\frac{y_n}{x_n-y_n}\left(\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}-\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n}\right)\\&\to f'(0).\end{aligned}$$

(2) 不成立. 反例: 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 则极限不为 0.

问题 3.8. *设 $f(x)$ 是在 $[-1,1]$ 上定义的函数, 且 $f'(0)$ 存在.*

(1) 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right]=\frac{f'(0)}{2}.$$

(2) 利用上述结论求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Solution. (1) 由导数的定义可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, 有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{0} - f'(0)\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x)-f(0)-f'(0)x| < \varepsilon|x|.$$

因此当 n 充分大, 使得 $1/n < \delta$ 时, 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$, 都有 $k/n^2 \in (0, \delta)$. 则

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| \le \frac{k}{n^2}\varepsilon.$$

对 k 求和, 可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)\right] - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right| \le \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

因 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$, 故

$$\left|\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)\right] - f'(0)\cdot\frac{n+1}{2n}\right| \le \varepsilon\cdot\frac{n+1}{2n}.$$

从而, 当 n 充分大时, 有

$$\left|\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)\right] - \frac{f'(0)}{2}\right| \le \varepsilon\cdot\frac{n+1}{2n} + \frac{|f'(0)|}{2n} < \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)\right] = \frac{f'(0)}{2}.$$

(2) 取对数得 $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$，令 $f(x) = \ln(1+x)$（$f'(0) = 1$），由 (1) 知极限为 $\frac{1}{2}$，故原极限为 $\sqrt{e}$. #